

آشنایی با اثبات در هندسه

قضیه

بسیاری از مسائل ریاضی، فرض و حکم دارند. فرض، داده‌هایی از مسئله است که درستی آنها را می‌پذیریم. حکم، موضوعی است که باید درست یا نادرست بودنش را بررسی کنیم. اگر به کمک فرض‌های مسئله و حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، توانستیم درست بودن حکم را نتیجه بگیریم، می‌توانیم به آن مسئله قضیه بگوییم. معمولاً ریاضیدان‌ها قضیه‌هایی را که در اثبات مسائل کاربرد فراوان دارند، نام‌گذاری می‌کنند.

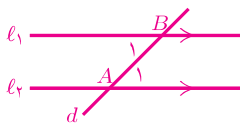
چند قضیه پرکاربرد

قضیه‌های زیر در حل مسائل هندسه کاربرد فراوان دارند. فرض و حکم هر یک را بنویسید.

۱. قضیه زاویه‌های متقابل به‌رأس. زاویه‌های متقابل به‌رأس برابرند.

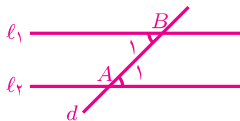
۲. الف) قضیه خطوط موازی و مورب. اگر خط d دو خط موازی l_1 و l_2 را قطع کند و

زاویه‌های A_1 و B_1 را پدید آورد، آنگاه $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.



ب) عکس قضیه خطوط موازی و مورب. اگر خط d دو خط l_1 و l_2 را قطع کند و

زاویه‌های A_1 و B_1 پدید آیند به‌طوری‌که $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ، آنگاه l_1 و l_2 موازی‌اند.



۳. قضیه مجموع زاویه‌های مثلث. مجموع زاویه‌های هر مثلث 180° درجه است.
۴. قضیه زاویه خارجی مثلث. اندازه هر زاویه خارجی در یک مثلث دلخواه برابر است با مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی غیرمجاورش.
۵. اصل اض‌رض. اگر دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
۶. قضیه ض‌ض‌ز. اگر دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
۷. قضیه ض‌ض‌ض. اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر برابر باشد، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
۸. قضیه ز‌ز‌ض. اگر دو زاویه و ضلع غیر بین آنها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع غیر بین آنها از مثلثی دیگر، نظیر به نظیر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
۹. الف) قضیه عمودمنصف. هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط فاصله یکسان دارد.
- ب) عکس قضیه عمودمنصف. اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط فاصله یکسان داشته باشد، این نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد.
۱۰. الف) قضیه مثلث متساوی‌الساقین. در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های پای ساق باهم برابرند.
- ب) عکس قضیه مثلث متساوی‌الساقین. اگر مثلثی دو زاویه برابر داشته باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.
۱۱. الف) قضیه فیثاغورس. در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازه وتر با مجموع مربع‌های اندازه دو ضلع دیگر برابر است.

^۱در ریاضیات اصل، عبارتی است که درستی آن بدون استدلال پذیرفته می‌شود.

- (ب) عکس قضیه فیثاغورس. اگر در مثلثی مربع اندازه یک ضلع با مجموع مربع‌های اندازه دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.
۱۲. قضیه وتر و یک ضلع. اگر وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
۱۳. الف) قضیه نیم‌ساز. هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه فاصله یکسان دارد. (ب) عکس قضیه نیم‌ساز. اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه فاصله یکسان داشته باشد، این نقطه روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد.
۱۴. قضیه شعاع و مماس. شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.
۱۵. قضیه کمان و وتر. وترهای نظیر دو کمان برابر، برابرند و برعکس.
۱۶. قضیه زاویه محاطی. اندازه هر زاویه محاطی با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه برابر است.

مسائل

۱. دو پاره‌خط برابر AB و CD یکدیگر را در نقطه M قطع کرده‌اند. عمود منصف‌های دو پاره‌خط AD و BC یکدیگر را در نقطه N قطع کرده‌اند. اگر نقطه N درون زاویه AMC باشد، آنگاه ثابت کنید MN نیم‌ساز زاویه AMC است.
- بُرنا با استفاده از قضیه‌هایی که در بخش قبل آمده، این مسئله را حل کرده است. راه‌حل بُرنا را بررسی کنید. شما نیز در حل مسئله‌های بعدی (مانند راه‌حل بُرنا) نام هر قضیه‌ای را که از آن استفاده می‌کنید، ذکر نمایید.